Шифр: 11-12

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Волховский

Школа МОБУ „Волховская городская гимназия №3 имени Героя Советского Союза А. Лукьянова"

Класс 11

ФИО Мельник Денис Александрович

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	×	3	24

11-12

№1 Выпишем все делители числа 77:

$-77, -11, -7, -1, 1, 7, 11, 77$

Разложения числа 77 на 2 множителя:

$(-77)\cdot(-1)$, $(-11)\cdot(-7)$, $1\cdot 77$, $7\cdot 11$

Если наименьшие числа в ~~разложении~~ наборе (-1) и (-77), то все остальные числа должны быть > -1 для выполнения условия

Если наименьшие числа (-7) и (-11), то все остальные числа должны быть > -7,

На множестве отрицательных целых чисел чисел > -7 больше, чем чисел > -1

Аналогично для положительных чисел (в разложениях нужно поменять знаки у всех чисел, т.е. рассмотреть пары $1\cdot 77$, $7\cdot 11$; а также поменять знак $>$ на знак $<$) чисел < 7 больше, чем чисел < 1 (на множестве положительных целых чисел)

Заметим, что вхождение числа 0 не влияет на произведение наибольших и наименьших чисел.

Итого, мы получим набор $\{-11; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 11\}$, состоящий из 17 чисел

Ответ: 17

11-12

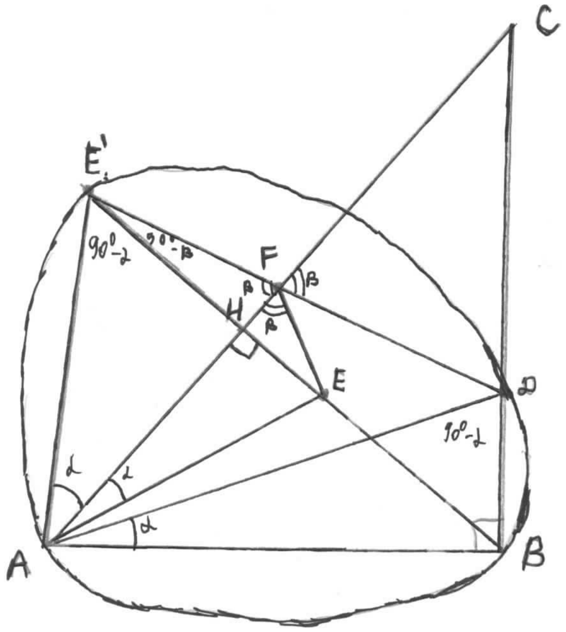
№2 Пусть все числа в множествах A и B различны, тогда их минимально возможная сумма $\frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{4n^2+2n}{2} =$

$= 2n^2+n$ (все различные числа от 1 до $2n$)

Но по условию сумма чисел в множествах $n^2+n^2 = 2n^2 < 2n^2+n$

Значит, наше предположение неверно, есть число, принадлежащее и множеству A, и множеству B ч.т.д.

№3



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = 90°$, BH – выс., $D \in BC$, $E \in BH$, $F \in CH$, $\angle BAD = \angle CAE$, $\angle AFE = \angle CF$

Док-ть: $\angle AEF = 90°$

Док-во:

1. Продлим DF до пересечения с BH, $DF \cap BH = (\cdot) E'$ ($\angle CFD = \angle HFE$, $\angle HFE$ – в $\triangle FHE$, $\angle FHE = 90°$ (опр. выс.), $\angle HFE < 90°$, зн. DE' и BE' пересекаются)
2. $\triangle E'FE$, $\angle E'FH = \angle DFC$ (св. верт. ($\angle$)), зн. FH – бис. (опр.), $FH \perp E'E$, FH – выс. (опр.), зн. $\triangle FHE'$ и $\triangle FHE$, у них:
   1) FH – общ.
   2) $\angle FHE' = \angle FHE = 90°$ (опр. выс.)
   3) $\angle HFE = \angle HFE'$ (док.)

Зн. $\triangle FHE' = \triangle FHE$ (призн. рав. (△)): по ст. и 2-м ($\angle$))), зн. $FE' = FE$, $E'H = EH$ (опр. равн. (△)))

№3 (продолжение)

зн. FH – мед. (опр.)

3. $\triangle E'HA$ и $\triangle EHA$, у них:

1) AH – общ.
2) $E'H = HE$ (док.)
3) $\angle E'HA = \angle EHA = 90^\circ$ (опр. вис.)

Зн. $\triangle E'HA = \triangle EHA$ (признак рав. (△): по 2-м ст. и (∠) м/у ними),
зн. $E'A = AE$, $\angle E'AH = \angle EAH$ (опр. равн. (△))

4. Обозначим $\angle HAE = \alpha$, $\angle AFE = \beta$

~~$\triangle E'AH$, $\angle HE'$~~ $\triangle FHE'$, $\angle FE'H + \angle E'FH = 90^\circ$ (св. остр. (∠) прям. (△)), $\angle FE'H = 90^\circ - \beta$

Аналогично $\triangle E'AH$, $\angle AE'H = 90^\circ - \alpha$,
$\triangle ADB$, $\angle ADB = 90^\circ - \alpha$

$\angle AE'H = \angle ADB = 90^\circ - \alpha$, $\angle AE'H$ и $\angle ADB$ опир. на AB,
зн. $E'DBA$ – впис. 4-х-уг-к, опишем окр. около $E'DBA$
$\angle DAB$ и $\angle DE'B$ – впис., опир. на $\smile DB$, зн.
$\angle DAB = \angle DE'B$ (св. впис. (∠), опир. на 1 дугу),
зн. $\alpha = 90^\circ - \beta$
$\alpha + \beta = 90^\circ$

5. $\triangle AEF$, $\angle AEF + \angle AFE + \angle FAE = 180^\circ$ (т-о сум. (∠) (△)),
$\angle AEF + \alpha + \beta = 180^\circ$
$\angle AEF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$
$\angle AEF = 180^\circ - 90^\circ$
$\angle AEF = 90^\circ$ ч. т. д.

№5 Заметим, что

1) Числа $1, 2, \dots, N-1$ не могут быть большими
2) Числа $N^2, N^2-1, \dots, N^2-N+1$ не могут быть маленькими
3) Число 1 всегда маленькое
4) Число N^2 всегда большое
5) $\sum$ больших $\geq \sum$ маленьких, значит нужно минимизировать $\sum$ больших и максимизировать $\sum$ маленьких
6) Расположив числа

N^2	N^2-1	$\dots$	N^2-N+1
$N-1$			
$\vdots$			
2			
1			

Подобным образом (в первой строке числа от N^2 до N^2-N+1, в первом столбце, начиная с нижней клетки и заканчивая 2-й сверху числа от 1 до $N-1$), мы сведем задачу к науке $(N-1)\times(N-1)$ и набору $\{N; N+1; \dots; N^2-N\}$ и „такому" в ответе N^2-1; если в этом наборе изменить все числа на $(-N+1)$ (уменьшить их на $(N-1)$), то разность между большими числами и маленькими не изменится (так как каждое число в наборе представимо в виде $x+(N-1)$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$, а количества больших и маленьких чисел равны), числа $1, 2, \dots, N-1$ в строках не могут быть большими, значит они не влияют, на то, какое число будет большим в каждой строке

№5 (продолжение)

Аналогично числа $N^2-1, N^2-2, \dots, N^2-N+1$ не влияют на то, какое число будет маленьким в столбцах. Значит мы свели задачу к полю $(N-1)\times(N-1)$ и набору $\{1, 2, \dots, N^2-2N+1\}$, то есть набору $\{1, 2, \dots, (N-1)^2\}$

Для него мы можем повторить отмеченную операцию и свести задачу к полю $(N-2)\times(N-2)$ и набору $\{1, 2, \dots, (N-2)^2\}$ ~~, Проделывая~~ и „накопить“ в ответе $(N-1)^2-1$ к уже „накопленному“ ответу. Проделывая аналогичные операции, всегда уменьшает значение N на 1, значит мы когда-нибудь мы ~~получим~~ сведём задачу к полю 1×1 и набору $\{1\}$ из него можно „накопить“ $1-1$ (т.к. 1 и большое, и маленькое число (т.к. 1 столбец и 1 строка)). Итого мы накопим $\sum_{i=1}^{N} i^2 - N$. Это и является наименьшей разностью Σ больших $-$ Σ маленьких, т.к. в каждом наборе в Σ больших уйдет x^2 (где x — размер поля), в Σ маленьких уйдет 1 (где 1 — гарантированно маленькое число) („накопление“ — мы знаем в выделенных 1-й строке и 1-м столбце какие будут числа большие и маленькие и можем добавить их в соответствующие суммы)

ответ $= \sum i^2 - N$

Шифр: 2-11-01

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020

Ленинградская область

Район Волховский

Школа МОБУ „Волховская городская гимназия №3 имени Героя Советского союза А. Лукьянова

Класс 11

ФИО Мельник Денис Александрович

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	0	0	14

№6 Запишем на доске последовательно следующие функции:

1) $x^2+1-(x+1)= x^2-x = x(x-1)$

2) $x^3+1-(x^2+1) = x^3-x^2 = x^2(x-1)$

3) $(x(x-1))\cdot(x^2(x-1)) = x^3(x-1)^2$

Применим метод интервалов:

$x^3(x-1)^2$

$$\underset{}{-}\quad 0 \quad + \quad 1 \quad + \quad x$$

Эта функция удовлетворяет условию

№7 Для удобства обозначим цвета как красный (к.) и синий (с.)

Раскрасим нечётные числа в чередующемся порядке:

$\underset{с.}{1}, \underset{к.}{3}, \underset{с.}{5}, \underset{к.}{7}, \underset{с.}{9}$ ...

Сумма любых двух одного цвета

$x + x+4\cdot2^n = 2x + 4\cdot n = 2(x+2\cdot n)$

(x – нечет., ~~$n \geq 0$~~, $n, x \in \mathbb{N}$, ~~$n \in \mathbb{Z}$~~)

$x+2\cdot 2^n$ – нечет., $x+2\cdot n \geq 3$, зн. $x+2\cdot n \neq 2^t$ ни при каком ~~$t \in \mathbb{N}$~~ $t \geq 0$, $t \in \mathbb{Z}$

зн. $2\cdot(x+2\cdot n) \neq 2^q$ ни при каком $q>0$, $q \in \mathbb{Z}$

Зн. при такой раскраске сумма любых 2-х нечетных одного цвета не является степенью 2

№7 (продолжение)

Рассмотрим числа вида $2n$, $n \in \mathbb{N}$, n - нечёт:

~~2, 4, 6, 8~~

$\underset{с.}{2}$, $\underset{к.}{6}$, $\underset{с.}{10}$, $\underset{к.}{14}$, $\underset{с.}{18}$, ...

Покрасим их в чередующемся порядке, начиная с того же цвета, что и нечетные

Тогда сумма 2-х одного цвета

$$2n+(2n+8x) = 4n+8x = 4(n+2x) = 2(2(n+2x))$$

$(n$ - нечет., $n, x \in \mathbb{N})$

Но мы знаем, что число вида $2(n+2x)$ не является степенью 2, зн. и $4(n+2x)$ не является степенью 2

Рассмотрим числа вида ~~$2(n+1)$~~ $4n$, $n \in \mathbb{N}$, n - нечёт:

$\underset{с.}{4}$, $\underset{к.}{12}$, $\underset{с.}{20}$, ...

Покрасим их аналогично

Сумма 2-х одного цвета

$$4n+4n+16x = 8n+16x = 2(4(n+2x))$$

Число вида $4(n+2x)$ не является степенью 2, зн. и $8(n+2x)$ не является степенью 2

Далее будем проделывать аналогичные операции. На шаге t рассмотрим числа $2^{t-1} \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$, n - нечёт и раскрасим их описанным выше образом. Сумма 2-х одного цвета

$$2^{t-1}n + 2^{t-1}n + 2^{t+1}x = 2^t n + 2^{t+1}x = 2(2^{t-1}n + 2^t x)\text{, но}$$

№7 (продолжение)

для числа $2^{t-1}n + 2^t x$ мы знаем, что

это не является степенью 2, зн-и число

$2^t + 2^{t+1}x$ не является степенью 2

На каждом шаге мы покрасим

половину еще не покрашенных чисел

~~$\lim(\sum_{i=1} \frac{1}{2^i})$~~ $\lim_{n\to+\infty}(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}) = 1$, зн. мы покрасим

100% чисел

Рассмотрим сумму чисел, раскрашенных

на разных шагах

$2^z x + 2^t \cdot y = 2^t(2^{n-t}x + y)$

($x, y \in \mathbb{N}$, x, y – нечет., ~~$z \neq t$~~ $z > t$ (можно утверждать без

ограничения общности, т.к. $z \neq t$))

$(2^{n-t}x + y)$ – нечет., минимальная сумма 2-х чисел $\in \mathbb{N}$

$1+2=3$, зн. $(2^{n-t}x+y)$ не является степенью 2,

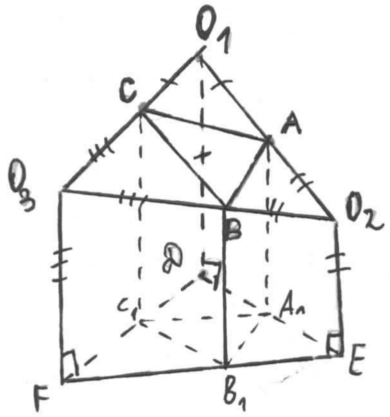
зн. $2^t(2^{n-t}x+y)$ не является степенью 2

Мы построили пример, при котором выполняется

условие

Ответ: можно

№9



Пусть O_1, O_2, O_3 — центры сфер, r_1, r_2, r_3 — радиусы сфер соответственно

$D, E, F \in$ пл. α,

$O_1D \perp \alpha$, $O_2E \perp \alpha$, $O_3F \perp \alpha$
(как радиусы, проведённые в точку касания)

Зн. $\triangle DEF$ — проекция $\triangle O_1O_2O_3$ на пл. α

Проведем $BB_1 \perp \alpha$, $AA_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$; $\triangle A_1B_1C_1$ — проекция $\triangle ABC$ на пл. α, $\triangle ABC$, $\triangle O_1O_2O_3 \subset$ пл. β, зн. ($\angle$) м/у ($\triangle$) и их проекциями равны

~~$AB \parallel O_1O_3$~~ зн. Периметры и площади при проецировании изменяются в одно и то же количество раз

$S_\triangle = p \cdot r$, $p = \frac{P}{2}$ (p — полупериметр, P — периметр, r — радиус опис. окр.)

$P_{\triangle O_1O_2O_3} = 2(r_1 + r_2 + r_3)$, $P_{\triangle ABC} < P_{\triangle O_1O_2O_3}$

$P_{\triangle DEF} \leq 2(r_1 + r_2 + r_3)$, $P_{\triangle A_1B_1C_1} < P_{\triangle DEF}$

$r = \frac{S_\triangle}{p}$, т.к. у проекций радиус опис. окр. $\triangle A_1B_1C_1$ < радиуса опис. окр. $\triangle DEF$, то и радиус опис. окр. $\triangle ABC$ < радиуса опис. окр. $\triangle DEF$

№8
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = t \\ \sin y + \cos x = p \end{cases}$$
t, p — рациональные, $0 < t, p \le 2$

$$\begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \cos y = t \\ \cos(y - \frac{\pi}{2}) + \cos x = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}) = t \\ 2\cos(\frac{y-x}{2} - \frac{\pi}{4}) = p \end{cases}$$

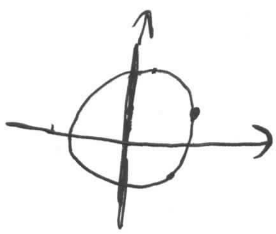
$$\frac{t}{p} = \frac{\cos(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4})}$$

$$t\cos(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4}) = p\cos(\frac{x-y}{2} - \frac{\pi}{4})$$

1) Если $\sin x$, $\cos x$ — рац., то подобрать m и n можно всегда

2) Если $\sin x$, $\cos x$ — иррац.

$$\cos(\frac{x-y}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{t}{p}\cos(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4})$$



$\cos(\frac{x-y}{2} - \frac{\pi}{4})$ и $\cos(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4})$ имеют одинаковую иррациональную часть (разобьем ~~чис~~ каждое число $z = n + q$, где n — рац., q — иррац. части)

№8 (продолжение) Лист 6 из 6 (2-11-01

~~Зн. числа~~
Один из возможных вариантов $\frac{x-y}{2}=0$

$x=y$

Зн. $\sin x$ и $\cos x$, $\sin y$, $\cos y$ имеют одинаковую иррац. часть
Зн. n и m можно подобрать

№10
Подставим $t=1$, узнаем сумму коэф. в 1-м из многочленов
$(a_1+b_1+c_1)$ или $(a_2+b_2+c_2)$

$t=0$, узнаем один из коэффициентов c
c_1 или c_2

$t=-1$ узнаем значение одного из выражений
$(a_1-b_1+c_1)$ или $(a_2-b_2+c_2)$

Подставляя t и $-t$ мы можем узнать значения выражений
$(a_1t^2+b_1t+c_1)$ или $(a_2t^2+b_2t+c_2)$ и
$(a_1t^2-b_1t+c_1)$ или $(a_2t^2-b_2t+c_2)$
Проделав это несколько раз, мы узнаем значения коэффициентов